

Revisiter l'équité pour le partage de loyer avec budgets

Stéphane Airiau¹ Hugo Gilbert¹ Umberto Grandi²
Jérôme Lang¹ Anaëlle Wilczynski³

¹ Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, Paris, France

² IRIT, Université Toulouse Capitole, Toulouse, France

³ MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France

stephane.airiau@dauphine.fr hugo.gilbert@lamsade.dauphine.fr
umberto.grandi@irit.fr jerome.lang@lamsade.dauphine.fr
anaelle.wilczynski@centralesupelec.fr

Résumé

Le partage des loyers consiste à calculer simultanément une affectation des chambres aux agents et un paiement, à partir des valuations individuelles de chaque chambre par chaque agent. Lorsque les agents ont une certaine contrainte budgétaire à respecter, une solution sans envie n'existe pas nécessairement. Nous proposons deux manières de contourner ce problème. Premièrement, nous relâchons le critère d'absence d'envie pour tenir compte des disparités budgétaires. Deuxièmement, nous autorisons les allocations fractionnaires, dans lesquelles les agents peuvent changer de chambres pendant la durée de la location.

Abstract

Rent division consists in simultaneously computing an allocation of rooms to agents and a payment, starting from an individual valuation of each room by each agent. When agents have budget limits, it is known that envy-free solutions do not necessarily exist. We propose two solutions to overcome this problem. In the first one, we relax envy-freeness to account for budget disparities. In the second one, we allow fractional allocations, in which agents may change rooms during the duration of the lease.

1 Introduction

Un ensemble de n agents souhaite faire une colocation dans un appartement de n chambres. Les chambres étant différentes, les agents ont des préférences particulières, modélisées par des valuations représentant le montant maximum qu'ils seraient capables de payer pour une chambre. Le problème de partage de loyer standard revient à se demander comment affecter les chambres aux agents et diviser le loyer

entre eux. Il existe une solution individuellement rationnelle (aucun agent ne paie plus pour sa chambre que sa valuation pour elle), sans envie (aucun agent ne préfère la situation d'un autre agent) et qui maximise le bien-être social [1].

Cependant, ce problème standard peut ne pas être réaliste dans la mesure où les agents ont en général un budget à respecter pour le paiement de leur chambre. Dans ce contexte, la recherche de solutions individuellement rationnelles et sans envie est loin d'être triviale [2], et peut même s'avérer vaine, comme illustré dans l'exemple suivant :

Considérons une colocation à deux agents 1 et 2 et deux chambres r_1 et r_2 pour un loyer total de 1000. Les deux agents attribuent les mêmes valuations aux chambres, 800 pour r_1 et 400 pour r_2 , mais ont des budgets différents, 600 pour l'agent 1 et 500 pour l'agent 2. Si l'on affecte la chambre r_2 à l'agent 1, alors la rationalité individuelle implique que 1 doit payer au plus 400, obligeant 2 à payer 600, ce qui excède son budget. Donc r_1 doit être affectée à 1 et r_2 à 2. Par rationalité individuelle, l'agent 2 ne peut pas payer plus que 400 donc, l'agent 1 doit payer sa limite de budget, 600, pour atteindre un loyer de 1000. L'agent 2, qui est dans une chambre qu'il évalue à 400 pendant qu'il paie exactement ce prix, a une utilité de 0, alors qu'il obtiendrait une utilité de $800-600=200$ s'il était dans la situation de l'agent 1. L'agent 2 envie donc l'agent 1.

Cet exemple montre que l'on ne peut pas toujours simultanément satisfaire la rationalité individuelle, les contraintes de budget et l'absence d'envie.

Cependant, deux solutions pourraient être envisagées :

1. Allouer, de manière à respecter les contraintes de budget et de rationalité individuelle, la chambre r_1 à l'agent 1

avec un paiement de 600 et la chambre r_2 à l'agent 2 avec un paiement de 400. On peut argumenter que l'envie de 2 envers 1 n'est pas justifiée puisque 2 n'est pas capable de payer le même paiement que 1. Cette solution peut donc être considérée comme sans envie *vis-à-vis du budget* (B-EF).

2. Allouer r_1 à 1 et r_2 à 2 pour la première moitié de l'année et échanger les chambres pour la seconde moitié, en demandant un paiement de 500 à chacun. Cette solution fractionnaire est sans envie et rationnelle individuellement.

Nous explorons dans cet article ces deux manières pour élargir l'ensemble des solutions équitables : l'absence d'envie vis-à-vis du budget et les allocations fractionnaires.

2 Le modèle

Un ensemble R de n chambres doivent être affectées à un ensemble A de n agents. Chaque agent i a des valuations $v_{ij} \in \mathbb{R}^+$ sur chaque chambre $r_j \in R$, et L est le montant total du loyer. Chaque agent i dispose d'un budget $b_i \in \mathbb{R}^+$.

Une solution au problème de partage de loyer consiste en une allocation $\sigma : A \rightarrow R$ et un vecteur de paiements $p : A \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\sum_i p_i = L$. Une solution est *abordable* si $p_i \leq b_i$ pour tout $i \in A$.

Les agents sont supposés avoir des utilités quasi-linéaires, et une solution (σ, p) est dite *sans envie* si aucun agent ne peut améliorer son utilité en échangeant la chambre et le paiement qui lui sont affectés avec ceux d'un autre agent : (σ, p) est sans envie si $v_{i\sigma(i)} - p_i \geq v_{i\sigma(j)} - p_j$ pour tous agents i, j . Une solution (σ, p) est *individuellement rationnelle* (IR) si pour tout agent i , il est vrai que $v_{i\sigma(i)} - p_i \geq 0$.

3 Absence d'envie vis-à-vis du budget

Lorsque les paiements individuels sont contraints par un budget, la notion d'envie peut naturellement être restreinte aux chambres qui sont abordables pour un agent donné, permettant un relâchement de l'absence d'envie.

Définition 1 Une solution (σ, p) est sans envie vis-à-vis du budget (B-EF) si pour tout agent i il est vrai que $v_{i\sigma(i)} - p_i \geq v_{i\sigma(j)} - p_j$ pour tout agent j t.q. $p_j \leq b_j$.

Contrairement au cadre sans budget, une allocation B-EF peut ne pas exister et ne pas maximiser le bien-être social. En revanche, nous montrons qu'une solution B-EF ainsi que son allocation sans paiement sont Pareto-optimales. De plus, une solution à la fois B-EF et IR peut être construite, si elle existe, à l'aide d'un programme linéaire en nombre entiers. Nous donnons également deux algorithmes efficaces pour des restrictions particulières : l'un en temps pseudo-polynomial lorsque l'allocation est fixée et l'autre en temps polynomial lorsque les paiements sont fixés.

4 Solutions fractionnaires

Une autre voie pour trouver des allocations sans envie en présence de budgets est d'autoriser les agents à passer une partie de leur temps dans des chambres différentes.

Définition 2 Une solution fractionnaire à un problème de partage de loyer est une matrice bistochastique X de taille $n \times n$, avec x_{ij} la part du temps que l'agent i passe dans la chambre r_j , et un vecteur de paiement $p : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Une solution fractionnaire (X, p) est *individuellement rationnelle* (IR) si pour tout agent i , il est vrai que $\sum_{r_j \in R} x_{ij} v_{ij} - p_i \geq 0$. De plus, une solution fractionnaire (X, p) est *sans envie* s'il est vrai pour tous agents i et i' que $\sum_{r_j \in R} x_{ij} v_{ij} - p_i \geq \sum_{r_j \in R} x_{i'j} v_{ij} - p_{i'}$.

Une solution fractionnaire sans envie n'existe pas toujours. Néanmoins, une solution fractionnaire, à la fois IR et EF, peut être construite en temps polynomial lorsqu'une telle allocation existe, en utilisant un programme linéaire.

Une solution fractionnaire peut donner lieu à de multiples implémentations, en fonction de l'ordre dans lequel les agents prennent leur chambres. Par le théorème de Birkhoff-von Neumann, pour toute solution fractionnaire X , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in (0, 1]$, avec $\sum_t \lambda_t = 1$, et $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ des allocations déterministes, tel que X peut être décomposée de la manière suivante : pour tout agent $i \in A$ et $r_j \in R$, $\sum_{\{t | \sigma_t(i)=j\}} \lambda_t = x_{ij}$. Une implémentation précise l'ordre dans lequel les allocations déterministes d'une décomposition sont effectuées. Nous montrons que trouver une implémentation d'une allocation fractionnaire qui minimise le nombre total de changements de chambres est NP-difficile. De plus, même lorsque la décomposition est donnée, trouver une implémentation qui minimise le nombre total de changements de chambres est NP-difficile.

5 Discussion

Avec quelques simulations sur des données synthétiques, nous remarquons qu'en pratique B-EF et les solutions fractionnaires permettent d'accroître significativement la proportion d'instances admettant une solution équitable.

Identifier la complexité du problème de décision concernant l'existence de solutions B-EF en général apparaît comme un problème ouvert intéressant.

Références

- [1] Gal, Ya'akov, Moshe Mash, Ariel D Procaccia et Yair Zick: *Which is the fairest (rent division) of them all?* Journal of the ACM (JACM), 64(6) :1–22, 2017.
- [2] Procaccia, Ariel, Rodrigo Velez et Dingli Yu: *Fair rent division on a budget*. Dans *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 1177–1184, 2018.